A2023 – MATH I MPI

Concours commun
Mines-Ponts

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2023

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES I - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On note $\langle .|. \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}$ pouvant être $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.
Si u et v sont deux applications linéaires pour lesquelles la notation $u \circ v$ a un sens, alors on note uv l'application $u \circ v$. De plus, si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E et k est un entier naturel non nul, u^k désigne l'application $u \circ \cdots \circ u$, où u apparaît k fois dans l'écriture. Par convention $u^0 = id_E$.

On s'intéresse au système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & \varphi(y) \\ y(0) & = & x_0 \end{array} \right. ,$$

avec $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, telle que $\varphi(0) = 0$. Cela entraîne que si $x_0 = 0$, alors la solution de ce système est la fonction nulle, et donc 0 est un point d'équilibre. Notons $d\varphi(0)$ l'application différentielle de φ en 0. L'objectif de ce problème est d'établir une condition suffisante sur le spectre de $d\varphi(0)$ pour assurer la stabilité de l'équilibre en ce point, et d'obtenir des informations quant à la dynamique des solutions au voisinage de ce point d'équilibre. Plus précisément, on établit le résultat suivant :

Théorème de Liapounov :
Soit le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & \varphi(y) \\ y(0) & = & x_0 \end{array} \right. ,$$

avec $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, telle que $\varphi(0) = 0$ et telle que toutes les valeurs propres complexes de $d\varphi(0)$ aient une partie réelle strictement négative. Alors il existe trois constantes $\tilde{\alpha}$, C et β strictement positives telles que :

$$\forall x_0 \in B(0, \tilde{\alpha}), \quad \forall t \in \mathbf{R}_+, \ \|f_{x_0}(t)\| \leqslant C e^{-\beta t} \|x_0\|,$$

où f_{x_0} est l'unique solution du système différentiel et $B(0, \tilde{\alpha})$ désigne la boule ouverte, pour la norme $\|.\|$, de centre 0 et de rayon $\tilde{\alpha}$.

Dans une première partie, on étudie une norme sur les endomorphismes des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}^n$. Dans la seconde partie, on établit des résultats sur le système différentiel linéaire, en se servant des résultats de la partie A. Enfin, la troisième partie est consacrée à la démonstration du théorème de Liapounov. Cette dernière partie est très largement indépendante des deux premières, à l'exception du résultat obtenu à la fin de la partie B.

A.. Etude d'une norme sur $\mathcal{L}(E)$

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$. Soit u un endomorphisme de E.

1 ▷ Après avoir justifié l'existence des bornes supérieures, montrer que :

$$\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| = 1}} \|u(x)\|.$$

2 $\triangleright$ On note $|||u||| = \sup\limits_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$. Montrer que $|||.|||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.

3 $\triangleright$ Montrer qu'il s'agit d'une norme sous-multiplicative, c'est-à-dire que :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2, \quad |||uv||| \leqslant |||u|||.|||v|||,$$

et en déduire une majoration de $|||u^k|||$, pour tout entier naturel k, en fonction de $|||u|||$ et de l'entier k.

B.. Etude de la stabilité en 0 du système linéaire

Dans cette partie, a désigne un endomorphisme de $\mathbf{C}^n$.

4 $\triangleright$ Montrer qu'il existe un entier naturel non nul r, des nombres complexes distincts λ_1, λ_2, ..., λ_r, ainsi que des entiers naturels non nuls m_1, m_2, ..., m_r, tels que :

$$\mathbf{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i,$$

où pour $i \in [\![1; r]\!]$, $E_i = Ker(a - \lambda_i id_{\mathbf{C}^n})^{m_i}$.

D'après la question précédente, si x est un élément de $\mathbf{C}^n$, il existe un unique r-uplet $(x_1, \ldots, x_r) \in E_1 \times \cdots \times E_r$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{r} x_i$. Fixons à présent $i \in [\![1; r]\!]$. On définit alors les endomorphismes :

$$p_i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^n & \rightarrow & E_i \\ x & \mapsto & x_i \end{array} \right. \quad \text{et} \quad q_i : \left| \begin{array}{ccc} E_i & \rightarrow & \mathbf{C}^n \\ x_i & \mapsto & x_i \end{array} \right. .$$

Par ailleurs, on note $|||.|||_i$ la norme sur $\mathcal{L}(E_i)$ introduite à la partie A, à savoir

$$\forall u \in \mathcal{L}(E_i), \quad |||u|||_i = \sup_{\substack{x \in E_i \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

On utilisera la notation $|||.|||_c$ pour $\mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$. Enfin, on notera a_i l'endomorphisme $p_i a q_i$.

5 $\triangleright$ Montrer que, pour tout $i \in [\![1; r]\!]$, il existe une constante $C_i > 0$ telle que :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E_i), \quad |||q_i u p_i|||_c \leqslant C_i |||u|||_i.$$

6 $\triangleright$ Montrer que, pour $i \in [\![1; r]\!]$, E_i est stable par a.

7 $\rhd$ Soient $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$. Exprimer $p_i q_j$ puis $\sum_{i=1}^{r} q_i p_i$ en fonction des endomorphimes $id_{\mathbf{C}^n}$ et id_{E_j}.

8 $\rhd$ Montrer que : $a = \sum_{i=1}^{r} q_i a_i p_i$.

9 $\rhd$ En déduire que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad e^{ta} = \sum_{i=1}^{r} q_i e^{ta_i} p_i.$$

10 $\rhd$ Montrer par ailleurs que :

$$\forall i \in [\![1;r]\!], \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad |\!|\!| e^{ta_i} |\!|\!|_i \leqslant |e^{t\lambda_i}| \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} |\!|\!| a_i - \lambda_i id_{E_i} |\!|\!|_i^k.$$

11 $\rhd$ En déduire l'existence d'un polynôme P à coefficients réels tel que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad |\!|\!| e^{ta} |\!|\!|_c \leqslant P(|t|) \sum_{i=1}^{r} e^{tRe(\lambda_i)},$$

où $Re(z)$ désigne la partie réelle d'un nombre complexe z.

12 $\rhd$ Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on notera u_A l'endomorphisme canoniquement associé à A dans $\mathbf{R}^n$ et v_A l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à A, vue comme une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On conservera la notation $|\!|\!|.|\!|\!|_c$ pour la norme introduite à la partie A sur $\mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$ et on utilisera $|\!|\!|.|\!|\!|_r$ sur $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}), \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad |\!|\!| e^{tu_A} |\!|\!|_r \leqslant C |\!|\!| e^{tv_A} |\!|\!|_c.$$

Dans la suite de cette partie, on considère u un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$, et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ sa matrice dans la base canonique. On notera par ailleurs, $Sp(A)$ le spectre complexe de A. Notons g_{x_0} l'unique solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ de :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & u(y) \\ y(0) & = & x_0 \end{array} \right. .$$

13 $\rhd$ Montrer que :

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}^n, \quad \lim_{t \to +\infty} \|g_{x_0}(t)\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Sp(A) \subset \mathbf{R}_-^* + i\mathbf{R}.$$

14 $\rhd$ On se place dans cette question dans le cas où toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative. Montrer alors qu'il existe deux constantes C_2 et α strictement positives telles que :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad |\!|\!| e^{tu} |\!|\!|_r \leqslant C_2 e^{-\alpha t},$$

et en déduire une majoration de $\|g_{x_0}(t)\|$ pour $t \in \mathbf{R}_+$.

C.. Démonstration du théorème de Liapounov

On considère dans cette partie une application φ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi(0) = 0$, et en notant $a = d\varphi(0)$, telle que toutes les valeurs propres de a aient une partie réelle strictement négative.
Soit $x_0 \in \mathbf{R}^n$. On s'intéresse au système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & \varphi(y) \\ y(0) & = & x_0 \end{array} \right. .$$

On admettra l'existence d'une solution de ce système définie sur $\mathbf{R}_+$, que l'on notera f_{x_0}.

15 $\rhd$ Montrer que la fonction

$$b : \left| \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n & \to & \mathbf{R} \\ (x, y) & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \left\langle e^{ta}(x) | e^{ta}(y) \right\rangle dt \end{array} \right.$$

est bien définie et qu'elle définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$.

On notera q la forme quadratique associée à b, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $q(x) = b(x, x)$.

16 $\rhd$ Démontrer alors que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad dq(x)(a(x)) = 2b(x, a(x)) = -\|x\|^2.$$

Pour toute fonction y définie sur $\mathbf{R}_+$, on associe la fonction $\varepsilon(y)$ définie par :

$$\varepsilon(y) : \left| \begin{array}{rcl} \mathbf{R}_+ & \to & \mathbf{R}^n \\ t & \mapsto & \varphi(y(t)) - a(y(t)) \end{array} \right. .$$

17 $\rhd$ Vérifier l'égalité

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad q(f_{x_0})'(t) = -\|f_{x_0}(t)\|^2 + 2b(f_{x_0}(t), \varepsilon(f_{x_0}(t))).$$

18 $\rhd$ Prouver l'existence de deux nombres réels α et β strictement positifs tels que, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on ait :

$$q(f_{x_0}(t)) \leqslant \alpha \quad \Rightarrow -\|f_{x_0}(t)\|^2 + 2b(f_{x_0}(t), \varepsilon(f_{x_0})(t)) \leqslant -\beta q(f_{x_0}(t)).$$

On fixe un tel couple (α, β) pour la suite de ce problème.

19 $\rhd$ Montrer alors que :

$$q(x_0) < \alpha \quad \Rightarrow \quad \forall t \geqslant 0, \; q(f_{x_0})(t) \leqslant e^{-\beta t} q(x_0).$$

20 $\rhd$ En déduire l'existence de trois constantes $\tilde{\alpha}$, C et β strictement positives telles que :

$$\forall x_0 \in B(0, \tilde{\alpha}), \quad \forall t \in \mathbf{R}_+, \ \|f_{x_0}(t)\| \leqslant C e^{-\frac{\beta}{2} t} \|x_0\|,$$

où $B(0, \tilde{\alpha})$ désigne la boule ouverte, pour la norme $\|.\|$, de centre 0 et de rayon $\tilde{\alpha}$.

Fin du problème