Exemples d'épreuves orales de Mathématiques

Concours commun Mines-Ponts

Mars 2025

Cet document contient quelques exemples d'exercices qui peuvent être posés à l'oral de Mathématiques.

Le déroulement de l'oral est décrit dans le règlement du concours, page 4, §1.1.3.

Le candidats sont invités à lire le rapport d'oral 2024.

Épreuve N° 1 - Filière MP

- 1^{er} exercice.
  À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur a_0, la suite définie par :
  $$a_{n+1} = 2^n - a_n,$$
  est-elle croissante ?

- $2^{ème}$ exercice.
  Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :
  $$M^3 + 2M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

Épreuve N° 2 - Filière MP

- 1^{er} exercice.
  On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$, et la relation de récurrence
  $$u_{n+1} = \sin(u_n).$$
  Déterminer un développement limité à deux termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- $2^{ème}$ exercice.
  On désigne par G un sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on suppose que $(G, \times)$ est un groupe, où $\times$ désigne le produit interne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  1. Démontrer que tous les éléments de G ont le même rang.
  2. Démontrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$, et un sous-groupe H de $GL_r(\mathbb{R})$ tels que :
  $$G = \left\{P^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P,\ A \in H\right\}.$$

Épreuve N° 3 - Filière MP

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X et Y des variables aléatoires discrètes, et $(\mathrm{X}_n)_n$, $(\mathrm{Y}_n)_n$ des suites de variables aléatoires discrètes. On note $(\star)$ la condition suivante :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| \geq \epsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \;\text{ et }\; \mathbb{P}(|\mathrm{Y}_n - \mathrm{Y}| \geq \epsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad (\star)$$

1. Soit x, y réels et $\epsilon > 0$. Justifiez l'implication :
$$|x + y| \geq \epsilon \quad \Longrightarrow \quad |x| \geq \frac{\epsilon}{2} \;\text{ ou }\; |y| \geq \frac{\epsilon}{2}$$
2. On suppose la condition $(\star)$ satisfaite. Établir :
$$\forall \epsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|\mathrm{X}_n + \mathrm{Y}_n - (\mathrm{X} + \mathrm{Y})| \geq \epsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

3. Application : Soit $(\mathrm{U}_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$, avec $p \in [0;1]$ et $\mathrm{V}_n = \mathrm{U}_n + \mathrm{U}_{n+1}$, pour tout n entier. Établir :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \mathbb{P}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}_i - 2p \geq \epsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

4. Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Établir :

$$\mathbb{P}(|\mathrm{X}| > \mathrm{M}) \xrightarrow[\mathrm{M} \to +\infty]{} 0.$$

5. On suppose la condition $(\star)$ satisfaite. Établir :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|\mathrm{X}_n\mathrm{Y}_n - (\mathrm{XY})| \geq \epsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Épreuve N° 4 - Filière MP

- 1^{er} exercice.
  Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $f \in \mathcal{L}(E)$, tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^{p+2} = f^p$.

  a. Que dire de f si $p = 0$?
  b. Que dire de f si $f \in GL(E)$?
  c. Justifier que $E = \ker(f^p) \oplus \ker(f^p - id)$.

  On suppose désormais que E est de dimension finie.

  d. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que f soit diagonalisable.
  e. On suppose p pair. Montrer que $E = \ker(f^p) \oplus \ker(f^p - id)$.
  f. On suppose p impair. Montrer que $\ker(f^p - id) = \ker(f - id)$, puis que f^p est diagonalisable.

- $2^{\text{ème}}$ exercice.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$ et $v_n = u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2$.

  a. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent simple de u_n.
  b. Étudier la suite de terme général v_n (variations, convergence).
  c. On rappelle que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ où γ est un réel fixé appelé constante d'Euler.

  Après avoir justifié que la série converge, montrer que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \ln 2 \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2}\right)$.

Épreuve N° 5 - Filière MP

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_i)_{i\in\mathbb{N}_n} \in [a,b]^{\mathbb{N}_n}$ et $(y_i)_{i\in\mathbb{N}_n} \in [a,b]^{\mathbb{N}_n}$.
On note E l'ensemble $C^0([a,b],\mathbb{R})$(que l'on suppose muni de la norme de la convergence uniforme) et P l'ensemble des applications polynomiales de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que l'adhérence de l'ensemble,

$$\{p \in P, \forall i \in \mathbb{N}_n, p(x_i) = y_i\},$$

est

$$\{f \in E, \forall i \in \mathbb{N}_n, f(x_i) = y_i\}.$$

Épreuve N° 6 - Filière MP

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Étudier la continuité de la fonction F définie sur $[0,1]$ par,

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\, dt.$$

Épreuve N° 7 - Filière MP

Soit $n \geq 2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer que $X^2 - tr(M)X$ est le polynôme minimal de M.
2. En déduire les puissances de M en fonction de M.

Épreuve N° 8 - Filière MP

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$, on pose :

$$h_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{d(t)}{(t^2 + x^4)^n} \ .$$

1. Montrer que h_n est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et vérifie :

$$h_n'(x) = -4nx^3 h_{n+1}(x),\ (\forall n \in \mathbb{N}^*), (\forall x > 0).$$

2. Montrer qu'il existe une suite (a_n) telle que $h_n(x) = a_n x^{2-4n}$, $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\forall x > 0)$.
3. En déduire $h_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*)$ et pour tout $x > 0$.

Épreuve N$^{\text{o}}$ 9 - Filière MP

Étudier la classe de la fonction :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = 0 \end{cases}$$

Épreuve N$^{\text{o}}$ 10 - Filière MP

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que l'application g définie par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, se prolonge en une application $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose de plus que $f(x) > 0$ pour $x \neq 0$ et $f''(0) \neq 0$.
   Montrer qu'il existe une application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $g^2 = f$.

Épreuve N$^{\text{o}}$ 11 - Filière MP

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité (Ω, P).
Soient X et Y deux v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*, P(Y = n) > 0$,
- pour tout $k, n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(x = k|Y = n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si} \quad k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. (a) Soient U, V, W des v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que pour tout entier k, $n \geq 1$,

   $$P(W = n) > 0, \text{ et } P(U = k|W = n) = P(V = k|W = n).$$

   Montrer que U et V suivent la même loi.
   (b) Montrer que les v.a. X et $Y + 1 - X$ suivent la même loi.
2. Supposons que X suit une loi géométrique.
   Montrer que les v.a. X et $Y + 1 - X$ sont indépendantes.

Épreuve N$^{\text{o}}$ 12 - Filière MP

On considère la fonction f continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

1. Étudier la convergence simple, uniforme, sur tout le compact de $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions,

   $$f_n(x) = f(nx).$$

2. Étudier la convergence simple, uniforme, sur tout le compact de $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions,

   $$f_n(x) = f(\frac{x}{n}).$$

Épreuve N° 13 - Filière MP

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on définit la fonction f par,

$$f(a,b) = \int_{-1}^{1} |t^2 + at + b| \, dt.$$

1. Déterminer le minimum de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$b \to f(0, b).$$

2. On fixe $b \in \mathbb{R}$. Déterminer le minimum de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$a \to f(a, b).$$

3. Déterminer le minimum de la fonction $f(a, b)$ lorsque $a, b \in \mathbb{R}$.

Épreuve N° 14 - Filière MP

Soient A et B deux matrices carrées de dimension $n > 1$ qui vérifient,

$$rang(AB - BA + I) = 1,$$

où I est la matrice identité.

1. On pose $X = AB - BA$. Montrer que, $tr(X^2) = 2tr(ABAB) - 2tr(A^2B^2)$.
2. En déduire que, $tr(ABAB) - tr(A^2B^2) = \frac{n(n-1)}{2}$.
   On pourra déterminer les valeurs propres de X.

Épreuve N° 15 - Filière MP

Soit fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, g définie pour $x > 0$ par,

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_{0}^{x} \cos(x - y) f(y) \, dy.$$

1. Déterminer la limite de g en 0.
2. On suppose que f a une limite en $+\infty$, déterminer celle de g.

Épreuve N° 16 - Filière MP

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices antisymétriques à coefficients dans $\mathbb{R}$. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que le spectre de A est inclus dans $i\mathbb{R}$, $(Sp(A) \subset i\mathbb{R})$.
2. Montrer que si A est inversible, alors $rang(A)$ est pair.
3. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $P = (I + A)(I - A)^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
4. On considère l'application :

$$\begin{cases} f : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) & \to \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \\ \qquad A & \mapsto f(A) = (I + A)(I - A)^{-1} \end{cases}$$

   Montrer que f est une application bijective.
5. Dans cette question on considère que $n = 2$. Pour $A \in SO_2(\mathbb{R})$, trouver un $B \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ tel que $(I + B)(I - B)^{-1} = A$.

Épreuve N° 17 - Filière PC

On fixe $\alpha > 0$. On pose $I = [0, \frac{\pi}{2}]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction :

$$\begin{cases} u_n : I & \to \mathbb{R} \\ \qquad x & \mapsto \sin^n x \cos^\alpha x \end{cases}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ converge simplement sur I.
2. Cette série de fonctions converge-t-elle normalement sur I ?
3. Converge-t-elle uniformément sur I ?

Épreuve N° 18 - Filière PC

Soit un entier $n \geq 2$. On note A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent 0 et les autres coefficients valent 1.

1. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1}.
2. Déterminer les valeurs propres de A et les espaces propres correspondants.

Épreuve N° 19 - Filière PC

Soit $(X_i : \Omega \to \mathbb{N}^*)_{i\in\mathbb{N}^*}$, une suite de variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi. Soit n fixé dans $\mathbb{N}^*$. On pose la variable aléatoire :

$$R_n : \omega \mapsto \mathrm{Card}(\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}),$$

où Card(.) est le nombre d'éléments dans $\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$A_{n,k} = \bigcup_{i=1}^{n} \{X_i = k\}.$$

1. Soit $Y : \Omega \to \mathbb{N}^*$ une variable aléatoire bornée par M. Montrer que :

$$\mathbb{E}(Y) \leq M.P(Y \geq 1).$$

2. Montrer que :

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}(\sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbf{1}_{A_{n,k}}) = 0.$$

3. Montrer que :

$$\mathbb{E}(R_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_{n,k}).$$

4. Étudier la suite $\big(\mathbb{E}(R_n)\big)_{n\geq 1}$.

Épreuve N° 20 - Filière PC

Soit $n \geq 2$ un entier.Calculer la borne supérieure de l'ensemble :

$$\Big\{\sum_{k=1}^{n-1} x_k.x_{k+1} + x_n x_1 \ ; \ \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 = 1 \ \text{ et } \ \sum_{k=1}^{n-1} x_k = 0\Big\}.$$

Épreuve N° 21 - Filière PC

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer ses valeurs et vecteurs propres.
2. On considère l'équation

$$(E) \qquad X^2 - 3X = A,$$

en la matrice inconnue X de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2.a. Vérifier que toute solution de (E) commute avec A.

2.b. Déterminer toutes les solutions de (E).

3. Calculer A^n où $n \geq 2$.

Épreuve N° 22 - Filière PC

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général

$$\frac{n^3}{n!}\, x^n.$$

2. Calculer, pour tout $x \in]-R; R[$, la somme $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}\, x^n$.

Épreuve N° 23 - Filière PC

Soit E un espace vectoriel euclidien et a et b, deux vecteurs libres de E. On définit l'application f sur E par,

$$\forall x \in E : f(x) = (a|x)b + (b|x)a.$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f.
2. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de f. L'application f est-elle diagonalisable ? Pouvait-on prévoir, sans déterminer, ses éléments propres ?

Épreuve N° 24 - Filière PC

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, croissante et de limite égale à $+\infty$.
Démontrer que :

$$\int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{a_n}\Big)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+a_n}.$$

Épreuve N° 25 - Filière PSI

Soit $n \geq 2$.
Soit $\delta \geq 0$, on note P_δ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\delta, \delta^2, \delta^3, \ldots, \delta^n$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on note $S_A = \{P^{-1}AP, P \in GL_n(\mathbf{C})\}$, l'ensemble des matrices semblables à A.

1. Déterminer les coefficients de $P_\delta^{-1}AP_\delta$ en fonction de ceux de A.
2. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$. Montrer qu'il existe une suite $(B_p)_{p\geq 0}$ de matrices de S_A tendant vers la matrice nulle. *On pourra commencer par trigonaliser la matrice A.*
3. Réciproquement, montrer que s'il existe une suite $(B_p)_{p\geq 0}$ de matrices de S_A tendant vers la matrice nulle, alors il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$.

Épreuve N° 26 - Filière PSI

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de triplets (a, b, c) d'entiers naturels tels que,

$$3a + 4b + 5c = n.$$

Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$. *On pourra commencer par trouver un encadrement de v_m qui désigne le nombre de couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $3a + 4b = m$.*

Épreuve N° 27 - Filière PSI

Exercice 1

1. Démontrer que l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: $X^r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, n'a pas de solution pour $r \geq 2$.
2. Déterminer les solutions de l'équation $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: $X^r = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2
On considère la suite de fonctions (f_n) définies par récurrence par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_0(x) = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\Big(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)}\Big).$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette suite de fonctions.

Épreuve N° 28 - Filière PSI

Exercice 1
Soit $f : x \mapsto \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t-x/y}}{\sqrt{t}}\, dt$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et vérifie l'équation différentielle : $(E) \quad : \; 2xy'' + y' - 2y = 0$.
3. On pose $y(x) = z(\sqrt{x})$. Résoudre (E).
4. Donner l'expression de $f(x)$.

Exercice 2
Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ sur $\mathbb{K}, d \in \{1, \ldots, n-1\}$.
Déterminer les endomorphismes E stabilisant tous les sous-espaces de E de dimension d.