



Exemples d'épreuves orales de Mathématiques

Concours commun Mines-Ponts

Mars 2025

Ce document contient quelques exemples d'exercices qui peuvent être posés à l'oral de Mathématiques.

Le déroulement de l'oral est décrit dans le [règlement du concours](#), page 4, §1.1.3.

Le candidats sont invités à lire le [rapport d'oral 2024](#).

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés selon les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines-Ponts.



Épreuve N° 1 - Filière MP

- 1^{er} exercice.

À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur a_0 , la suite définie par :

$$a_{n+1} = 2^n - a_n,$$

est-elle croissante ?

- 2^{ème} exercice.

Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^3 + 2M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

Épreuve N° 2 - Filière MP

- 1^{er} exercice.

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$, et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \sin(u_n).$$

Déterminer un développement limité à deux termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- 2^{ème} exercice.

On désigne par G un sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on suppose que (G, \times) est un groupe, où \times désigne le produit interne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que tous les éléments de G ont le même rang.
2. Démontrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$, et un sous-groupe H de $GL_r(\mathbb{R})$ tels que :

$$G = \left\{ P^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P, A \in H \right\}.$$

Épreuve N° 3 - Filière MP

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X et Y des variables aléatoires discrètes, et $(X_n)_n, (Y_n)_n$ des suites de variables aléatoires discrètes. On note (\star) la condition suivante :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(|Y_n - Y| \geq \epsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (\star)$$

1. Soit x, y réels et $\epsilon > 0$. Justifiez l'implication :

$$|x + y| \geq \epsilon \quad \implies \quad |x| \geq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{ou} \quad |y| \geq \frac{\epsilon}{2}$$

2. On suppose la condition (\star) satisfaite. Établir :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X_n + Y_n - (X + Y)| \geq \epsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

3. Application : Soit $(U_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$, avec $p \in [0; 1]$ et $V_n = U_n + U_{n+1}$, pour tout n entier. Établir :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i - 2p \geq \epsilon\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

4. Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Établir :

$$\mathbb{P}(|X| > M) \xrightarrow[M \rightarrow +\infty]{} 0.$$

5. On suppose la condition (\star) satisfaite. Établir :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X_n Y_n - (XY)| \geq \epsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Épreuve N° 4 - Filière MP

- 1^{er} exercice.

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) et $f \in \mathcal{L}(E)$, tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^{p+2} = f^p$.

- a. Que dire de f si $p = 0$?
- b. Que dire de f si $f \in GL(E)$?
- c. Justifier que $E = \ker(f^p) \oplus \ker(f^p - id)$.

On suppose désormais que E est de dimension finie.

- d. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que f soit diagonalisable.
- e. On suppose p pair. Montrer que $E = \ker(f^p) \oplus \ker(f^p - id)$.
- f. On suppose p impair. Montrer que $\ker(f^p - id) = \ker(f - id)$, puis que f^p est diagonalisable.

- 2^{ème} exercice.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$ et $v_n = u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2$.

- a. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent simple de u_n .
- b. Étudier la suite de terme général v_n (variations, convergence).
- c. On rappelle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ où γ est un réel fixé appelé constante d'Euler.

Après avoir justifié que la série converge, montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \ln 2 \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2} \right)$.

Épreuve N° 5 - Filière MP

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_i)_{i \in \mathbb{N}_n} \in [a, b]^{\mathbb{N}_n}$ et $(y_i)_{i \in \mathbb{N}_n} \in [a, b]^{\mathbb{N}_n}$.

On note E l'ensemble $C^0([a, b], \mathbb{R})$ (que l'on suppose muni de la norme de la convergence uniforme) et P l'ensemble des applications polynomiales de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

Montrer que l'adhérence de l'ensemble,

$$\{p \in P, \forall i \in \mathbb{N}_n, p(x_i) = y_i\},$$

est

$$\{f \in E, \forall i \in \mathbb{N}_n, f(x_i) = y_i\}.$$

Épreuve N° 6 - Filière MP

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Étudier la continuité de la fonction F définie sur $[0, 1]$ par,

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt.$$

Épreuve N° 7 - Filière MP

Soit $n \geq 2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer que $X^2 - \text{tr}(M)X$ est le polynôme minimal de M .
 2. En déduire les puissances de M en fonction de M .
-

Épreuve N° 8 - Filière MP

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$, on pose :

$$h_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{d(t)}{(t^2 + x^4)^n} dt.$$

1. Montrer que h_n est dérivable sur \mathbb{R}_*^+ et vérifie :

$$h'_n(x) = -4nx^3 h_{n+1}(x), \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*), (\forall x > 0).$$

2. Montrer qu'il existe une suite (a_n) telle que $h_n(x) = a_n x^{2-4n}$, $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\forall x > 0)$.
 3. En déduire $h_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$.
-

Épreuve N° 9 - Filière MP

Étudier la classe de la fonction :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x, y) = 0 \end{cases}$$

Épreuve N° 10 - Filière MP

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que l'application g définie par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, se prolonge en une application \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
 2. On suppose de plus que $f(x) > 0$ pour $x \neq 0$ et $f''(0) \neq 0$.
Montrer qu'il existe une application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que $g^2 = f$.
-

Épreuve N° 11 - Filière MP

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité (Ω, P) . Soient X et Y deux v.a. à valeurs dans \mathbb{N}^* telles que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) > 0$,
- pour tout $k, n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X = k | Y = n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. (a) Soient U, V, W des v.a. à valeurs dans \mathbb{N}^* telles que pour tout entier $k, n \geq 1$,

$$P(W = n) > 0, \text{ et } P(U = k | W = n) = P(V = k | W = n).$$

Montrer que U et V suivent la même loi.

(b) Montrer que les v.a. X et $Y + 1 - X$ suivent la même loi.

2. Supposons que X suit une loi géométrique.

Montrer que les v.a. X et $Y + 1 - X$ sont indépendantes.

Épreuve N° 12 - Filière MP

On considère la fonction f continue de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

1. Étudier la convergence simple, uniforme, sur tout le compact de \mathbb{R}_+ de la suite de fonctions,

$$f_n(x) = f(nx).$$

2. Étudier la convergence simple, uniforme, sur tout le compact de \mathbb{R}_+ de la suite de fonctions,

$$f_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right).$$

Épreuve N° 13 - Filière MP

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on définit la fonction f par,

$$f(a, b) = \int_{-1}^1 |t^2 + at + b| dt.$$

1. Déterminer le minimum de la fonction définie sur \mathbb{R} par,

$$b \rightarrow f(0, b).$$

2. On fixe $b \in \mathbb{R}$. Déterminer le minimum de la fonction définie sur \mathbb{R} par,

$$a \rightarrow f(a, b).$$

3. Déterminer le minimum de la fonction $f(a, b)$ lorsque $a, b \in \mathbb{R}$.

Épreuve N° 14 - Filière MP

Soient A et B deux matrices carrées de dimension $n > 1$ qui vérifient,

$$\text{rang}(AB - BA + I) = 1,$$

où I est la matrice identité.

1. On pose $X = AB - BA$. Montrer que, $\text{tr}(X^2) = 2\text{tr}(ABAB) - 2\text{tr}(A^2B^2)$.

2. En déduire que, $\text{tr}(ABAB) - \text{tr}(A^2B^2) = \frac{n(n-1)}{2}$.

On pourra déterminer les valeurs propres de X .

Épreuve N° 15 - Filière MP

Soit fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, g définie pour $x > 0$ par,

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \cos(x-y)f(y) dy.$$

1. Déterminer la limite de g en 0.

2. On suppose que f a une limite en $+\infty$, déterminer celle de g .

Épreuve N° 16 - Filière MP

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices antisymétriques à coefficients dans \mathbb{R} . Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que le spectre de A est inclus dans $i\mathbb{R}$, ($Sp(A) \subset i\mathbb{R}$).
2. Montrer que si A est inversible, alors $\text{rang}(A)$ est pair.
3. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $P = (I + A)(I - A)^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
4. On considère l'application :

$$\begin{cases} f : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto f(A) = (I + A)(I - A)^{-1} \end{cases}$$

Montrer que f est une application bijective.

5. Dans cette question on considère que $n = 2$. Pour $A \in SO_2(\mathbb{R})$, trouver un $B \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ tel que $(I + B)(I - B)^{-1} = A$.

Épreuve N° 17 - Filière PC

On fixe $\alpha > 0$. On pose $I = [0, \frac{\pi}{2}]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction :

$$\begin{cases} u_n : I & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sin^n x \cos^\alpha x \end{cases}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge simplement sur I .
2. Cette série de fonctions converge-t-elle normalement sur I ?
3. Converge-t-elle uniformément sur I ?

Épreuve N° 18 - Filière PC

Soit un entier $n \geq 2$. On note A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent 0 et les autres coefficients valent 1.

1. Calculer A^2 . En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} .
 2. Déterminer les valeurs propres de A et les espaces propres correspondants.
-

Épreuve N° 19 - Filière PC

Soit $(X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{N}^*)_{i \in \mathbb{N}^*}$, une suite de variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi. Soit n fixé dans \mathbb{N}^* . On pose la variable aléatoire :

$$R_n : \omega \mapsto \text{Card}(\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}),$$

où $\text{Card}(\cdot)$ est le nombre d'éléments dans $\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$A_{n,k} = \bigcup_{i=1}^n \{X_i = k\}.$$

1. Soit $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{N}^*$ une variable aléatoire bornée par M . Montrer que :

$$\mathbb{E}(Y) \leq M \cdot P(Y \geq 1).$$

2. Montrer que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbf{1}_{A_{n,k}}\right) = 0.$$

3. Montrer que :

$$\mathbb{E}(R_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_{n,k}).$$

4. Étudier la suite $(\mathbb{E}(R_n))_{n \geq 1}$.

Épreuve N° 20 - Filière PC

Soit $n \geq 2$ un entier. Calculer la borne supérieure de l'ensemble :

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n-1} x_k \cdot x_{k+1} + x_n x_1 ; \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 = 1 \text{ et } \sum_{k=1}^{n-1} x_k = 0 \right\}.$$

Épreuve N° 21 - Filière PC

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer ses valeurs et vecteurs propres.
2. On considère l'équation

$$(E) \quad X^2 - 3X = A,$$

en la matrice inconnue X de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- 2.a. Vérifier que toute solution de (E) commute avec A .
 - 2.b. Déterminer toutes les solutions de (E) .
3. Calculer A^n où $n \geq 2$.
-

Épreuve N° 22 - Filière PC

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général

$$\frac{n^3}{n!} x^n.$$

2. Calculer, pour tout $x \in]-R; R[$, la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} x^n$.
-

Épreuve N° 23 - Filière PC

Soit E un espace vectoriel euclidien et a et b , deux vecteurs libres de E . On définit l'application f sur E par,

$$\forall x \in E : f(x) = (a|x)b + (b|x)a.$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f .
 2. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de f . L'application f est-elle diagonalisable ? Pouvait-on prévoir, sans déterminer, ses éléments propres ?
-

Épreuve N° 24 - Filière PC

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, croissante et de limite égale à $+\infty$.
Démontrer que :

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{a_n} \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + a_n}.$$

Épreuve N° 25 - Filière PSI

Soit $n \geq 2$.

Soit $\delta \geq 0$, on note P_δ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\delta, \delta^2, \delta^3, \dots, \delta^n$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on note $S_A = \{P^{-1}AP, P \in GL_n(\mathbf{C})\}$, l'ensemble des matrices semblables à A .

1. Déterminer les coefficients de $P_\delta^{-1}AP_\delta$ en fonction de ceux de A .
 2. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$. Montrer qu'il existe une suite $(B_p)_{p \geq 0}$ de matrices de S_A tendant vers la matrice nulle. *On pourra commencer par trigonaliser la matrice A .*
 3. Réciproquement, montrer que s'il existe une suite $(B_p)_{p \geq 0}$ de matrices de S_A tendant vers la matrice nulle, alors il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$.
-

Épreuve N° 26 - Filière PSI

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre de triplets (a, b, c) d'entiers naturels tels que,

$$3a + 4b + 5c = n.$$

Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$. *On pourra commencer par trouver un encadrement de v_m qui désigne le nombre de couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $3a + 4b = m$.*

Épreuve N° 27 - Filière PSI

Exercice 1

1. Démontrer que l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C}) : X^r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, n'a pas de solution pour $r \geq 2$.
2. Déterminer les solutions de l'équation $X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C}) : X^r = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2

On considère la suite de fonctions (f_n) définies par récurrence par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_0(x) = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \left(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)} \right).$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette suite de fonctions.

Épreuve N° 28 - Filière PSI

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t-x/y}}{\sqrt{t}} dt$.

1. Montrer que f est définie sur \mathbb{R}^+ .
2. Montrer que f est \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* , et vérifie l'équation différentielle : $(E) : 2xy'' + y' - 2y = 0$.
3. On pose $y(x) = z(\sqrt{x})$. Résoudre (E) .
4. Donner l'expression de $f(x)$.

Exercice 2

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ sur \mathbb{K} , $d \in \{1, \dots, n-1\}$.

Déterminer les endomorphismes E stabilisant tous les sous-espaces de E de dimension d .

