ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Notations et résultats admis

— Dans tout le sujet, n est un entier naturel fixé non nul.

— Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ est un espace probabilisé fini.

— On note $L^0(\Omega)$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des variables aléatoires réelles definies sur Ω. On notera que si $X \in L^0(\Omega)$, $X(\Omega)$ est une partie finie de $\mathbf{R}$. On confondra systématiquement variable aléatoire nulle et variable aléatoire presque sûrement nulle.

— Si $X \in L^0(\Omega)$, on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance.

— Une variable aléatoire $X \in L^0(\Omega)$ suit une loi de Rademacher si :

$$X(\Omega) = \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = -1) = \frac{1}{2}.$$

— Si $p \in [1, +\infty[$ et $X \in L^0(\Omega)$, on note $\|X\|_p = (\mathbf{E}(|X|^p))^{1/p}$. On admet que l'application $X \mapsto \|X\|_p$ est alors une norme sur $L^0(\Omega)$.

— Si $m \in \mathbf{N}^\star$, $p \in [1, +\infty[$ et $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$, on définit la quantité $\|(x_1, \ldots, x_m)\|_p^{\mathbf{R}^m}$ par :

$$\|(x_1, \ldots, x_m)\|_p^{\mathbf{R}^m} = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

On admet que l'application $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m \mapsto \|(x_1, \ldots, x_m)\|_p^{\mathbf{R}^m}$ est une norme sur $\mathbf{R}^m$.

— On note $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ l'ensemble des suites de $\mathbf{R}$ nulles à partir d'un certain rang. On admet alors que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par

$$\forall u, v \in \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}, \quad \langle u, v \rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i v_i$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$.

Inégalité de Hölder

Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Soient $X, Y \in L^0(\Omega)$ que l'on suppose toutes les deux positives.

1 ▷ Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}_+, \quad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

2 ▷ En déduire l'inégalité suivante (inégalité de Hölder) :

$$\mathbf{E}(XY) \leq \left(\mathbf{E}\left(X^p\right)\right)^{1/p} \left(\mathbf{E}\left(Y^q\right)\right)^{1/q}.$$

On pourra commencer par traiter le cas où $\mathbf{E}\left(X^p\right) = \mathbf{E}\left(Y^q\right) = 1$.

3 ▷ Quelle inégalité retrouve-t-on lorsque $p = q = 2$? En donner alors une preuve directe.

Une inégalité de déviation

Soit $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher.

4 ▷ Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{ch}\,(t) \leq \mathrm{e}^{t^2/2}.$$

5 ▷ Montrer que : pour tout $t \geq 0$, pour tout $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(t \sum_{i=1}^n c_i X_i\right)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2\right).$$

6 ▷ En déduire que : pour tout $t \geq 0$, pour tout $x \geq 0$ et pour tout $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\mathbf{P}\left(\exp\left(x \left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|\right) > \mathrm{e}^{tx}\right) \leq 2\,\mathrm{e}^{-tx} \exp\left(\frac{x^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2}\right).$$

On pourra utiliser l'inégalité de Markov.

7 ▷ Montrer que : pour tout $t \geq 0$ et pour tout $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ non nul,

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right| > t\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2}\right).$$

Inégalités de Khintchine

Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher. Soit $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$.

8 ▷ Soit X une variable aléatoire réelle positive et finie. Soit F_X la fonction définie pour tout $t \geq 0$, par

$$F_X(t) = \mathbf{P}(X > t).$$

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge, puis que

$$\mathbf{E}(X^p) = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

9 ▷ On suppose dans cette question que $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^3 \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ converge, puis que

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^4\right) \leq 8 \int_0^{+\infty} t^3 \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t.$$

10 ▷ Montrer que

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2.$$

11 ▷ En déduire qu'il existe un réel $\beta_p > 0$ tel que

$$\mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{1/p} \leq \beta_p \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)^{1/2}.$$

12 ▷ On suppose $p \geq 2$. Montrer que

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)^{1/2} \leq \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{1/p}.$$

Dans les questions numérotées de 13 ▷ à 15 ▷, on suppose $1 \leq p < 2$.

13 ▷ Justifier qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{4}$.

14 ▷ Montrer que

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right) \leq \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{2\theta/p} \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^4\right)^{(1-\theta)/2}.$$

15 ▷ Montrer qu'il existe $\widetilde{\alpha}_p > 0$ tel que

$$\widetilde{\alpha}_p \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)^{1/2} \leq \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{1/p}.$$

16 ▷ En déduire qu'il existe un réel α_p tel que

$$\alpha_p \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)^{1/2} \leq \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{1/p}.$$

Une première conséquence

Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi de Rademacher.

17 ▷ Montrer que l'application φ définie sur $\left(L^0(\Omega)\right)^2$ par

$$\forall X, Y \in L^0(\Omega), \quad \varphi(X, Y) = \mathbf{E}(XY)$$

est un produit scalaire sur $L^0(\Omega)$.

18 ▷ Soit l'application $\psi : u \in \mathbf{R}^{(\mathbf{N})} \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} u_i X_i$. Montrer que ψ prend ses valeurs dans $L^0(\Omega)$, puis que ψ conserve le produit scalaire.

19 ▷ On note $R = \psi\left(\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}\right)$. Montrer que pour tous $p, q \in [1, +\infty[$, les normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ sont équivalentes sur R.

Une deuxième conséquence

Dans cette partie, on suppose que n est une puissance de 2 : on écrit $n = 2^k$ avec $k \in \mathbf{N}^\star$.

20 ▷ Soit $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbf{R}^k$. Montrer que

$$\alpha_1 n \left\|(a_1, \ldots, a_k)\right\|_2^{\mathbf{R}^k} \leq \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i\right| \leq \beta_1 n \left\|(a_1, \ldots, a_k)\right\|_2^{\mathbf{R}^k}.$$

On pourra utiliser les questions 11 et 16.

21 ▷ En déduire qu'il existe un sous-espace vectoriel F de dimension k de $\mathbf{R}^n$ tel que :

$$\forall x \in F, \quad \alpha_1 \sqrt{n} \left\|x\right\|_2^{\mathbf{R}^n} \leq \left\|x\right\|_1^{\mathbf{R}^n} \leq \beta_1 \sqrt{n} \left\|x\right\|_2^{\mathbf{R}^n}.$$

En ordonnant les n éléments de $\{-1,1\}^k$ de manière arbitraire, on pourra utiliser l'application T définie sur $\mathbf{R}^k$ par $T(a_1, \ldots, a_k) = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_i\right)_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k}$.

Fin du problème