A2025 – MATH II MPI

Concours commun
Mines-Ponts

**ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2025

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES II - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Notations et objectifs du problème

Dans tout le problème :

— n désigne un entier naturel non nul et l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ est noté $[\![1, n]\!]$.

— $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (respectivement $S_n(\mathbf{R})$, resp. $D_n(\mathbf{R})$, resp. $GL_n(\mathbf{R})$), désigne l'ensemble des matrices carrées (resp. symétriques, resp. diagonales, resp. inversibles) réelles de taille n, et on confond un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ avec son unique coefficient ;

— si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note $M^\top$ sa transposée et pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $M_{i,j}$ le coefficient de M situé à la i-ème ligne et la j-ème colonne ;

— on note $\pi(M)$ le nombre de valeurs propres réelles strictement positives de M comptées avec leur multiplicité, ainsi par exemple $\pi(I_n) = n$;

— si $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^n$ on note $\mathrm{Diag}(u_1, \dots, u_n)$ la matrice $D \in D_n(\mathbf{R})$ telle que $D_{i,i} = u_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$;

— si f et g sont deux polynômes non simultanément nuls, on note $f \wedge g$ leur PGCD ;

— si f est un polynôme, on note également f sa fonction polynomiale associée ;

— on note $\sigma(f)$ le nombre de racines réelles de f appartenant à l'intervalle $]-1; 1[$, comptées avec leur multiplicité, ainsi par exemple $\sigma(X^2(X-1)(X+1)) = 2$;

— on dit que le réel α est une **racine stable** de f si $\alpha \neq 0$ et $f(\alpha) = f(\alpha^{-1}) = 0$;

— si f est un polynôme de degré $m \in \mathbf{N}$ et s'écrit

$$f = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k,$$

on note f_0 son polynôme réciproque, défini par

$$f_0 = a_0 X^m + a_1 X^{m-1} + \cdots + a_{m-1} X + a_m = \sum_{k=0}^{m} a_{m-k} X^k;$$

— on note $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^\top$ la matrice colonne de taille n dont le premier coefficient est égal à 1 et les autres à 0 ;

— on note S la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf les $n-1$ coefficients situés juste au-dessus de la diagonale, égaux à 1 :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad S_{i,j} = \delta_{i+1,j} \ \text{ (symbole de Kronecker);}$$

— pour tout polynôme réel f on définit la matrice $J(f) \in S_n(\mathbf{R})$ par

$$J(f) = f_0(S)^\top f_0(S) - f(S)^\top f(S).$$

Dans ce problème p désigne un polynôme à coefficients réels, scindé sur $\mathbf{R}$ de degré n,

$$p = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, \qquad a_n \neq 0,$$

et on note $\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_n$ ses racines toutes réelles, comptées avec leurs multiplicités.

L'objectif du problème est d'établir l'égalité $\sigma(p) = \pi(J(p))$ (critère de Schur-Cohn) dans le cas où $J(p)$ est inversible, puis de proposer une démarche générale permettant de compter les racines de p dans $]-1;1[$, lorsque la matrice $J(p)$ n'est pas inversible.

Ces résultats, généralisables aux polynômes à coefficients complexes, sont utiles dans l'étude de la stabilité de certains systèmes dynamiques.

A. Propriétés du polynôme p_0 et stabilité des racines

1 ▷ Montrer que p_0, le polynôme réciproque de p, vérifie

$$\forall x \in \mathbf{R}^* \quad p_0(x) = x^n p(1/x)$$

et en déduire que

$$p_0 = a_n \prod_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j X).$$

2 ▷ Montrer que $p \wedge p_0 = 1$ si et seulement si p ne possède pas de racine stable.

Jusqu'à la fin de la partie **A.** on suppose que toutes les racines de p sont stables et d'ordre de multiplicité 1.

3 ▷ Justifier qu'il existe $\lambda \in \{-1, 1\}$ tel que $p = \lambda p_0$.

Soit h le polynôme de degré n défini par $h(X) = Xp'$, où p' est le polynôme dérivé de p. On note h_0 et $(p')_0$ les polynômes réciproques respectifs de h et p'.

4 $\triangleright$ Montrer que $h = np - \lambda(p')_0$, puis que $h_0 = \lambda(np - Xp')$.

5 $\triangleright$ Vérifier que p' est scindé sur $\mathbf{R}$ puis montrer que $h \wedge h_0 = 1$ et en déduire que p' n'admet pas de racine stable.

B. Liberté d'une famille de polynômes

Pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$, on note f_j le polynôme

$$f_j = a_n(1-\alpha_n X)\cdots(1-\alpha_{j+1}X)(X-\alpha_{j-1})\cdots(X-\alpha_1) = a_n \prod_{k=j+1}^{n}(1-\alpha_k X)\prod_{k=1}^{j-1}(X-\alpha_k)$$

avec, selon les conventions habituelles, $\displaystyle\prod_{k=n+1}^{n}(1-\alpha_k X) = \prod_{k=1}^{0}(X-\alpha_k) = 1$.

6 $\triangleright$ Montrer que s'il existe deux entiers i, k tels que $1 \leq i < k \leq n$ et $\alpha_i\alpha_k = 1$, alors α_i est racine de chaque polynôme f_j, où $j \in [\![1, n]\!]$, et que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est liée.

Jusqu'à la fin de la partie **B.** on suppose qu'aucune racine de p n'est stable.

On note E le sous-espace vectoriel des fractions rationnelles à coefficients réels dont les éventuels pôles sont des inverses de racines de p (on ne demande pas de justifier que E est un espace vectoriel). Les éléments de E sont donc les fractions rationnelles dont le dénominateur peut s'écrire comme produit fini, éventuellement égal à 1, de facteurs $(1 - \alpha_i X)$ où $1 \leq i \leq n$.

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on définit la fraction rationnelle $g_j \in E$ par

$$g_j = \frac{f_j}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i X)}$$

et l'application P_j, qui à une fraction rationnelle $f \in E$ associe la fraction rationnelle

$$P_j(f) = \frac{(1-\alpha_j X)f - (1-\alpha_j^2)f(\alpha_j)}{X - \alpha_j}.$$

7 $\triangleright$ Montrer que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, l'application P_j est un endomorphisme de E et déterminer son noyau.

8 ▷ Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ et tout $g \in E$, calculer $P_j \left(\dfrac{(X - \alpha_j)g}{1 - \alpha_j X} \right)$.

9 ▷ En déduire que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

C. Expression de la matrice $J(p)$

10 ▷ Montrer que la famille $((S^\top)^i U)_{0 \leq i \leq n-1}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Les matrices S et U ont été définies dans la partie préliminaire du problème.

Pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$, on définit les matrices

$$B_j = S - \alpha_j I_n \qquad \text{et} \qquad C_j = I_n - \alpha_j\, S.$$

11 ▷ Démontrer que

$$J(p) = \sum_{j=1}^{n} f_j(S)^\top (C_j^\top C_j - B_j^\top B_j) f_j(S).$$

Les polynômes $f_1, \ldots, f_n$ ont été définis dans le préambule de la partie **B**.

12 ▷ Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $C_j^\top C_j - B_j^\top B_j = (1 - \alpha_j^2) U U^\top$.

13 ▷ On note D la matrice diagonale de taille n :

$$D = \mathrm{Diag}((1 - {\alpha_j}^2)_{1 \leq j \leq n})$$

et $V \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice telle que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ème colonne de V est $V_j = f_j(S^\top)\, U$. Montrer que

$$J(p) = V D V^\top.$$

14 ▷ En déduire, à l'aide de la question 6, que si p possède une racine stable alors $J(p)$ n'est pas inversible.

D. Cas où $J(p)$ est inversible : critère de Schur-Cohn

On rappelle que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ alors $\pi(M)$ désigne le cardinal de l'ensemble de ses valeurs propres strictement positives, comptées avec leurs multiplicités.

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de sa structure euclidienne canonique. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ vérifie la condition $(\mathcal{C}_M)$ quand

$$\forall X \in F \setminus \{0_{n,1}\} \qquad X^\top M X > 0.$$

On note $d(M)$ la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ vérifiant la condition $(\mathcal{C}_M)$, c'est-à-dire :

$$d(M) = \max\{\dim F \mid F \text{ s.e.v de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \text{ vérifiant } (\mathcal{C}_M)\}.$$

15 ▷ Soit deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbf{R})$ vérifiant $A = P^\top BP$. Montrer que $d(B) \geq d(A)$ puis que $d(B) = d(A)$.

16 ▷ Pour toute matrice $M \in S_n(\mathbf{R})$ construire un sous-espace vectoriel F_M de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de dimension $\pi(M)$ vérifiant la condition $(\mathcal{C}_M)$. On a donc $d(M) \geq \pi(M)$.

17 ▷ On veut montrer que pour toute matrice $M \in S_n(\mathbf{R})$ on a $\pi(M) = d(M)$. Par l'absurde, en supposant l'existence d'un sous-espace vectoriel G de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de dimension $\dim G > \pi(M)$ vérifiant la condition $(\mathcal{C}_M)$, montrer $\dim(F_M^\perp \cap G) \geq 1$, en déduire une contradiction et conclure.

18 ▷ Démontrer le **critère de Schur-Cohn** :

Si $J(p)$ est inversible alors p ne possède aucune racine stable et $\sigma(p) = \pi(J(p))$.

E. Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité

19 ▷ Montrer, à l'aide des questions 9 et 13, que si p n'admet pas de racine stable et si $J(p)$ n'est pas inversible alors il existe un polynôme q non nul à coefficients réels de degré au plus $n-1$ tel que $q(S^\top)\,U = 0_{n,1}$.

20 ▷ En déduire que la matrice $J(p)$ est inversible si et seulement si p n'admet aucune racine stable.

F. Un cas particulier

On suppose dans cette partie, comme on l'a fait aux questions 3 à 5, que toutes les racines de p sont stables et de multiplicité 1 et on note $h = Xp'$ (où p' est le polynôme dérivé de p) et h_0 le polynôme réciproque de h. On rappelle que, d'après la question 3, il existe un réel $\lambda \in \{-1, 1\}$ tel que $p = \lambda p_0$.

21 ▷ Montrer que $J(h)$ est inversible.

22 ▷ Montrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $r \in]1-\eta; 1[$, le polynôme $p(rX)$

est scindé, admet exactement $\sigma(p)$ racines à l'intérieur de l'intervalle $]-1;1[$ et ne possède aucune racine stable.

Pour tout réel $r > 0$, on note $F(r) = J(p(rX))$.

23 ▷ Montrer que

$$\lim_{r \to 1^-} \pi\left(\frac{n}{2(r-1)} F(r)\right) = n - \sigma(p).$$

24 ▷ Justifier que l'application $F : \mathbf{R}_+^* \to S_n(\mathbf{R})$ est dérivable et que

$$F'(1) = 2n(p(S))^\top p(S) - 2S^\top (p'(S))^\top p(S) - 2(p(S))^\top p'(S)S.$$

25 ▷ En déduire, à l'aide des résultats de la question 4, que

$$\frac{n}{2(r-1)} F(r) \underset{r \to 1}{=} J(h) + o(1).$$

On admet que l'application définie sur $S_n(\mathbf{R})$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ qui à une matrice symétrique associe le n-uplet de ses valeurs propres réelles comptées avec leurs multiplicités, rangées dans l'ordre décroissant, est continue.

26 ▷ En déduire que $\sigma(p) = n - 1 - \pi(J(p'))$.

G. Méthode générale.

On se place dans le cas général, sans disposer d'information sur la stabilité et la multiplicité des racines de p, et on cherche à calculer $\sigma(p)$.

On construit les deux polynômes f et g vérifiant $f = p \wedge p_0$ et $p = fg$.

27 ▷ Montrer que $\sigma(g) = \pi(J(g))$.

28 ▷ Proposer une méthode permettant de construire un nombre fini (éventuellement nul) de polynômes $g_1, \ldots, g_\ell$, dont les racines sont stables et de multiplicité 1, tels que $f = g_1 g_2 \cdots g_\ell$. Exprimer $\sigma(p)$ à l'aide de $n, \deg g, \pi(J(g)), \ell, \pi(J(g))$ ainsi que $\pi(J(g_1')), \ldots, \pi(J(g_\ell'))$.

Fin du problème