ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Notations

Soit J un intervalle de $\mathbf{R}$.

- L'ensemble $\mathcal{C}^k(J, \mathbf{R})$ avec $k \in \mathbf{N}^*$ désigne l'ensemble des fonctions $f : J \to \mathbf{R}$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre k existent et telles que $f^{(k)}$ soit continue sur J.

- L'ensemble $\mathcal{C}^\infty(J, \mathbf{R})$ désigne l'ensemble des fonctions $f : J \to \mathbf{R}$ indéfiniment dérivables sur J.

- Si $f : J \to \mathbf{R}$ une fonction bornée, on note

$$\|f\|_{\infty,J} = \sup \{|f(x)|,\, x \in J\}\,.$$

Introduction

Dans ce sujet, on étudie l'équation différentielle non linéaire

$$(E) : \quad y'(x) + y(x) + 1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{y(x)},$$

dont l'inconnue est une fonction $y : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$. On montrera en Partie V que cette équation peut-être utilisée pour caractériser la propagation d'une épidémie non létale au sein d'une population d'individus.

On admet dans tout le sujet que le problème de Cauchy

$$(C) : \quad \begin{cases} y'(x) + y(x) + 1 = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{y(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

admet une unique solution $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$, que l'on va chercher à approcher de plusieurs manières.

Partie I : Linéarisation de (E)

Pour approcher la solution y du problème de Cauchy (C), on propose dans un premier temps de linéariser l'équation (E). Comme y est continue et vérifie $y(0) = 0$, on remarque au voisinage de 0 que

$$\exp(y(x)) \approx 1 + y(x).$$

On propose donc d'approcher y par la solution de l'équation différentielle linéaire

$$(E_\ell) : \quad u'(x) + u(x) + 1 = \frac{1}{2}(1 + u(x)),$$

dont l'inconnue est une fonction $u : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$. On introduit de même le problème de Cauchy associé

$$(C_\ell) : \quad \begin{cases} u'(x) + u(x) + 1 = \frac{1}{2}(1 + u(x)) \\ u(0) = 0 \end{cases}.$$

1 ▷ Justifier qu'il existe une unique solution u au problème de Cauchy (C_ℓ), donner son expression et dresser son tableau de variation.

2 ▷ Montrer qu'il existe une unique solution constante de l'équation (E_ℓ), notée $\gamma \in \mathbf{R}$, et vérifier que la solution u trouvée en question 1 satisfait

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = \gamma.$$

On admet à présent dans toute la suite du sujet que les propriétés observées sur u, la solution de (C_ℓ), restent vérifiées sur y, la solution de (C). En particulier, on admet que :

- y est décroissante sur $\mathbf{R}_+$,
- $\lim_{x \to +\infty} y(x) = c$, où $c \in \mathbf{R}$.

3 ▷ Montrer que c est une solution constante de (E), puis que (E) admet exactement deux solutions constantes notées c_1 et c_2 telles que $c_1 < 0 < c_2$. En déduire la valeur de c en fonction de c_1 et c_2.

Partie II : Séries de Dirichlet

On propose dans cette partie d'étudier des séries de fonctions particulières appelées séries de Dirichlet.

Définition 1 *Une série de fonctions* $\sum_{n \geq 0} f_n$ *est dite de Dirichlet si*

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad f_n(x) = a_n e^{-\lambda_n x},$$

où la suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *vérifie, pour une valeur donnée* $M \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad |a_n| \leq \frac{M}{2^n},$$

et la suite de réels $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est strictement croissante et vérifie*

$$\lambda_0 = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty, \qquad \textit{et} \qquad \lambda_n \underset{n\to+\infty}{=} O(n).$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on définit alors la quantité $b_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^k a_n$.

4 ▷ Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, les réels b_k sont bien définis.

5 ▷ Montrer que toute série de Dirichlet $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbf{R}_+$. On note alors f sa somme. Justifier que f est continue sur $\mathbf{R}_+$.

6 ▷ Exprimer $f(0)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ en fonction de a_0 et b_0.

7 ▷ Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $f \in \mathcal{C}^k(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ et donner une expression de $x \mapsto f^{(k)}(x)$. Exprimer ensuite $f^{(k)}(0)$ en fonction de b_k.

8 ▷ Montrer que si $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+$ alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Partie III : Relations sur les coefficients de la série de Dirichlet

Revenons au problème de Cauchy (C), et à l'étude de sa solution $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$. Supposons dorénavant que y est la somme d'une série de Dirichlet, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x},$$

où les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifient les propriétés mentionnées en Définition 1. On introduit également la fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad g(x) = \mathrm{e}^{y(x)}.$$

9 ▷ Exprimer a_0 et b_0 en fonction de la constante c introduite en partie I.

10 ▷ En utilisant l'équation (E) satisfaite par y, calculer b_1.

11 ▷ Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$g^{(k)}(0) = (-1)^k d_k,$$

où les coefficients d_k sont définis par

$$d_0 = 1, \qquad \text{et} \qquad \forall k \geq 1 \quad d_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} d_{k-i} b_i.$$

12 ▷ Soit $k \in \mathbf{N}^*$. En utilisant l'équation (E), satisfaite par y, exhiber une relation de récurrence liant b_{k+1}, b_k et d_k.

Partie IV : Approximation de la solution y

Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Pour approcher la solution y de (C), on propose dans cette partie de tronquer toutes les sommes en s'arrêtant au terme de rang N. Les résultats de la Partie III permettent d'obtenir une approximation des quantités β_k définies pour tout $k \in \mathbf{N}$ par

$$\beta_k = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^k a_n.$$

On introduit également la fonction tronquée $y_N : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad y_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}.$$

En se donnant les valeurs de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on veut dans cette partie calculer les valeurs des coefficients a_n pour n de 1 à N. On utilisera les notations

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^N, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^N.$$

13 ▷ Montrer que

$$\|y_N - y\|_{\infty,\mathbf{R}_+} \leq \frac{M}{2^N},$$

et déduire que y_N converge uniformément vers y sur $\mathbf{R}_+$. Proposer ensuite un intervalle $J \subset \mathbf{R}_+$ où la majoration de $\|y_N - y\|_{\infty,J}$ serait plus fine.

14 ▷ Montrer que $VA = B$ où $V \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ est une matrice que l'on explicitera.

15 ▷ Prouver que le système $VA = B$ admet une unique solution $A \in \mathbf{R}^N$.

Partie V : Modèle de propagation d'épidémie SIR

Pour modéliser la propagation d'une épidémie non létale au sein d'une population d'individus, on peut utiliser le modèle de propagation d'épidémie appelé SIR. Dans ce modèle, la population est séparée en trois groupes :

- Le groupe des personnes susceptibles, n'ayant pas attrapé la maladie, est noté S et sa proportion au cours du temps est représentée par la fonction $S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$.

- Le groupe des personnes infectées par la maladie est noté I et sa proportion au cours du temps est représentée par la fonction $I \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$.

- Le groupe des personnes ayant contracté la maladie puis récupéré est noté R. On suppose qu'un individu ne peut attraper la maladie qu'une seule fois dans sa vie. Une fois dans le groupe des individus récupérés, il y reste définitivement et ne redevient jamais susceptible. La proportion du groupe R au cours du temps est représentée par la fonction $R \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$.

On a ainsi la relation

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \qquad S(x) + I(x) + R(x) = 1.$$

Dans un modèle de propagation d'épidémie SIR, ces trois fonctions sont de plus des solutions d'un problème de Cauchy associé à un système d'équations différentielles non linéaires

$$(F) : \quad \begin{cases} S'(x) = -I(x)S(x) \\ I'(x) = I(x)S(x) - I(x) \\ R'(x) = I(x) \\ S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = R_0 \end{cases},$$

où $S_0, I_0, R_0 \in [0,1]$ sont les conditions initiales. On admet dans la suite le résultat suivant :

Théorème 1 *Pour (S_0, I_0, R_0) fixés, le problème de Cauchy (F) admet une unique solution $(S, I, R) \in (\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}))^3$. De plus, si (S, I, R) et $(\widetilde{S}, \widetilde{I}, \widetilde{R})$ sont les solutions associées aux conditions initiales (S_0, I_0, R_0) et $(\widetilde{S_0}, \widetilde{I_0}, \widetilde{R_0})$, alors*

$$(S_0, I_0, R_0) \neq (\widetilde{S_0}, \widetilde{I_0}, \widetilde{R_0}) \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbf{R}_+ \quad (S(x), I(x), R(x)) \neq \left(\widetilde{S}(x), \widetilde{I}(x), \widetilde{R}(x)\right).$$

16 ▷ Supposons que $S_0 = 0$. Donner l'expression du triplet solution (S, I, R) du système (F).

17 ▷ Montrer que si $S_0 > 0$ alors la fonction S du triplet solution (S, I, R) de (F) ne s'annule jamais, et en déduire que S est strictement positive.

18 ▷ Supposons que $S_0 > 0$. Montrer que la fonction S du triplet solution (S, I, R) de (F) vérifie la relation

$$\left(-\frac{S'}{S}\right)' = -S' + \frac{S'}{S}.$$

On se place à partir de maintenant dans le cas où $S_0 = 1/2$, $I_0 = 1/2$ et $R_0 = 0$. On introduit de plus la fonction $h : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad h(x) = \ln\left(\frac{S(x)}{S_0}\right) = \ln\left(2S(x)\right).$$

19 ▷ Montrer que h est solution du problème de Cauchy (C).

Pour approcher la fonction S, on introduit la fonction $S_N : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad S_N(x) = S_0 \mathrm{e}^{y_N(x)} = \frac{1}{2}\exp\left(\sum_{n=0}^{N} a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}\right).$$

20 ▷ Montrer que S_N converge uniformément vers S sur $\mathbf{R}_+$ quand $N \to +\infty$ et que

$$\|S_N - S\|_{\infty,\mathbf{R}_+} \leq \frac{M\mathrm{e}^{2M}}{2^{N+1}}.$$

Partie VI : Modèle probabiliste

Toutes les variables aléatoires que l'on sera amené à considérer dans la suite sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On rappelle que $\binom{a}{b}$ est nul si $b > a$.

Pour toute suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geq 0}$, on note :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \Delta U_n = U_{n+1} - U_n.$$

Dans tout ce qui suit, on considère une population $\mathcal{P}$ de $M \geq 1$ individus, et l'on fixe $K \in \{0, \dots, M\}$. On note

$$E = \{(s, i, r) \in \mathbf{N}^3,\ s + i + r = M\}.$$

On considère maintenant un autre modèle de propagation de la même épidémie non létale pendant plusieurs jours au sein de la population $\mathcal{P}$.

Chaque matin, la population se répartit en trois classes distinctes : les personnes susceptibles (jamais infectées), les personnes infectées, et les personnes rétablies (et désormais immunisées). On note $\tilde{S}_n, \tilde{I}_n$ et $\tilde{R}_n$ les effectifs des trois classes au matin du n-ième jour et l'on convient que

$$\tilde{S}_0 > 0, \tilde{I}_0 \geq 1,$$

de sorte que l'on ne soit pas dans un cas trivial où l'épidémie est finie ou ne peut pas commencer.

Lorsqu'au matin du n-ième jour, $(\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r) \in E$, l'évolution quotidienne est la suivante :

— dans la journée, chacune des s personnes saines rencontre, indépendamment des autres, K personnes au hasard parmi les M personnes de la population totale. Dès que l'une au moins des rencontres se fait avec une personne infectée, la personne saine en question devient infectée le lendemain matin ;

— dans le même temps, chaque personne infectée peut guérir à la fin de la journée avec une probabilité ρ fixée dans $]0, 1[$.

21 ▷ Soit $(s, i, r) \in E$. Conditionnellement à l'événement $\Big((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\Big)$, quelle est la probabilité, notée $p(i)$, pour une personne susceptible d'être infectée lors de cette journée ?

22 ▷ Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \dots, M\}$, montrer que :

$$\mathbf{E}[Z] = \sum_{(s,i,r) \in E} \left(\sum_{k=0}^{M} k\ \mathbf{P}\Big(Z = k \,\Big|\, (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\Big) \right) \mathbf{P}\Big((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\Big). \tag{1}$$

23 ▷ Justifier que pour tout $n \geq 0$, les variables aléatoires $\tilde{S}_n$, $\tilde{I}_n$ et $\tilde{R}_n$ ainsi que les variables aléatoires $\Delta\tilde{S}_n$, $\Delta\tilde{I}_n$ et $\Delta\tilde{R}_n$, ont une espérance finie.

24 ▷ Établir l'identité suivante :

$$\mathbf{E}\left[\Delta\tilde{R}_n\right] = \rho\mathbf{E}\left[\tilde{I}_n\right].$$

25 ▷ Établir l'identité suivante : pour $(s, i, r) \in E$, pour tout $k \in \{0, \cdots, s\}$,

$$\mathbf{P}\Big(\Delta \tilde{S}_n = -k \,\Big|\, (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\Big) = \binom{s}{k} \Big(p(i)\Big)^k \Big(1 - p(i)\Big)^{s-k}.$$

26 ▷ Montrer que

$$\mathbf{E}\left[\Delta \tilde{S}_n\right] = -\mathbf{E}\left[\tilde{S}_n \, p(\tilde{I}_n)\right],$$

puis en déduire l'équation satisfaite par $\mathbf{E}\left[\Delta \tilde{I}_n\right]$.

Fin du problème